Grundlagen zum Stoffgebiet „Algebra“ (alle außer Vorklasse)

I. Grundbegriffe

Stellen Sie folgende Mengen möglichst einfach dar:

1 $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqq x < 6\} =$

2 $\{2; 3; 4\} \cap \{1; 2; 4; 6\} =$

3 $\{1; 2; 3\} \cup \{2; 3; 4; 5\} =$

Geben Sie jeweils ein Beispiel für x an:

4 $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$: $x =$

5 $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$: $x =$

6 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $x =$

II. Rationale Zahlen und Terme

Berechnen Sie die folgenden Produkte und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

7 $(3 + a) \cdot (4 - a) =$

8 $-2(2x - v)(3v + x) =$

9 $(2x - 3v)^2 =$

10 $(3 + a)^3 =$

Faktorisieren Sie folgende Terme so weit wie möglich:

11 $3x - xa + bx =$

12 $6x(u + v) - 9(u + v)y =$

13 $x^2 - 4 =$

14 $4x^2 + 9y^2 + 12xy =$

15 $x^2 - 5x + 6 =$

Fassen Sie folgende Terme zusammen und vereinfachen Sie so weit wie möglich:
Es gilt a, b, x, y, z $\in \mathbb{R}^+$

16 $\frac{x+1}{2} + \frac{2}{x+1} =$

17 $\frac{1}{2a} - \frac{x}{ab} =$

18 $\left(-\frac{5x}{a+z}\right) \cdot \left(-\frac{z+a}{5y}\right) =$

19 $[z \neq 1]$ $\frac{z^2 + 1 + 2z}{2x + 2y} \cdot \frac{x+y}{z^2 - 1} =$

20 $\frac{2x}{y} : \frac{x}{2y} =$

21 $[a \neq b]$ $\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a - b} =$

III. Lineare Gleichungen und Funktionen

22 Von einem Ballen Kleiderstoff ist ein Drittel rot, ein Viertel schwarz und die verbleibenden 8 m^2 sind grün gefärbt. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des gesamten Ballens.

23 Wenn man fünf aufeinander folgende natürliche Zahlen addiert, erhält man die Zahl 155. Bestimmen Sie diese fünf Zahlen.

24 Ein Kunde kauft ein Paar Schuhe für 75 € und bezahlt mit einem 100 € - Schein. Der Verkäufer geht zu seinem Nachbarn, um zu wechseln, da er nicht genug Kleingeld hat. Nachdem der Kunde das Wechselgeld erhalten und das Geschäft verlassen hat, bringt der Nachbar den 100 € - Schein zurück, da es sich um Falschgeld handelt. Der Schuhverkäufer muss natürlich seinem Nachbarn das Falschgeld durch echtes Geld ersetzen.
Welchen Betrag hat der Schuhverkäufer insgesamt verloren? Begründen Sie Ihre Meinung.

25 Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x - 2y = 5 \\ \text{II} & 2x + 3y = -4 \end{array} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

26 Veranschaulichen Sie die beiden Gleichungen aus Aufgabe 25 durch Zeichnen der zugehörigen Funktionsgraphen und kennzeichnen Sie die Lösungsmenge L.

Berechnen Sie jeweils $x \in \mathbb{R}$:

27 $\frac{x}{3} = \frac{4-x}{4}$

28 $(x-4)(4x-3) = (4x+3)(x-8)$

29 Geben Sie zunächst die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an.
$\frac{3x-2}{x+2} = 7 - \frac{5}{x+2}$

IV. Rechnen mit reellen Zahlen

Vereinfachen Sie folgende Terme ohne Verwendung des Taschenrechners

30 $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} =$

31 $\sqrt{2} + \sqrt{3} =$

32 $u, v \in \mathbb{R}$: $\sqrt{4u^2 + 4uv + v^2} =$

33 Zwischen welchen ganzen Zahlen liegt die Zahl $\sqrt{137}$? Begründen Sie Ihre Aussage.

V. Quadratische Gleichungen, Ungleichungen und Funktionen

Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender Aussagen bezüglich der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

34 $x^2 + 10x - 96 = 0$

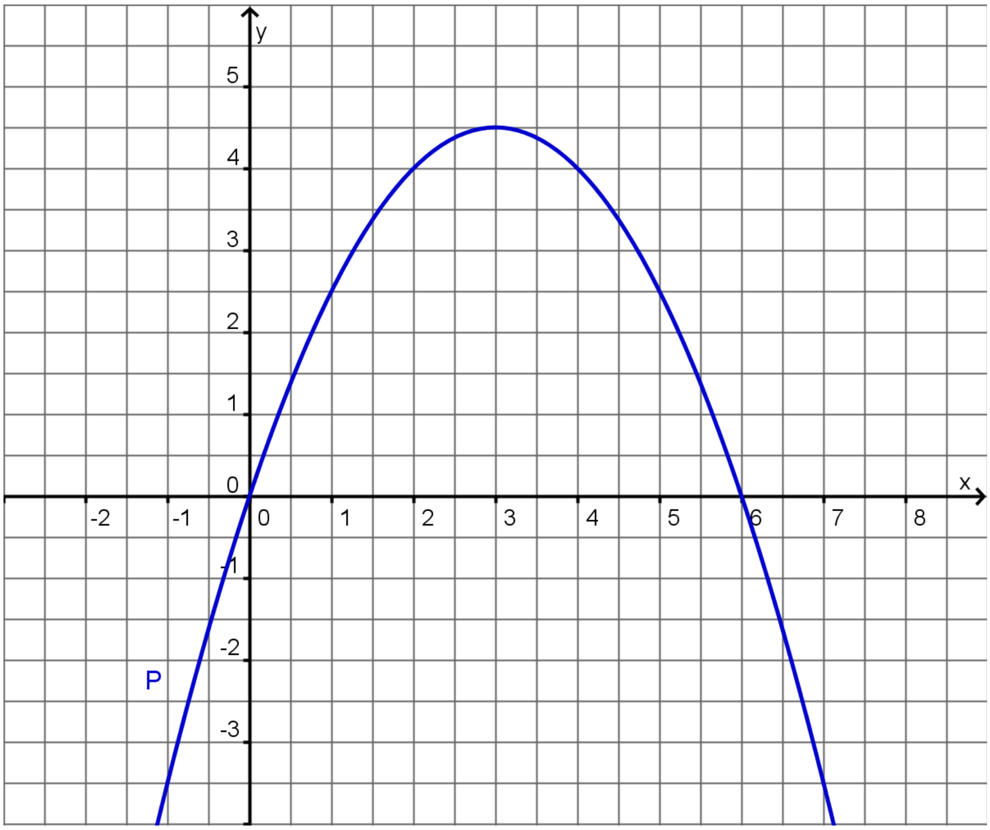
35 $a^2 - a + 1 = 0$

36 $3x^2 - 5x \leq -2$

37 Eine Normalparabel hat die Punkte A(0 / 0) und B(2 / 0) mit der x-Achse gemeinsam. Ermitteln Sie die möglichen zugehörigen Funktionsgleichungen.

38 Gegeben ist die Parabel P mit der Gleichung $y = (x - 3)^2$ und die Gerade G mit der Gleichung $y = 3 - x$.
Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Parabel P und der Geraden G.

39.0 Im folgenden kartesischen Koordinatensystem ist der Graph P einer quadratischen Funktion mit der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$ dargestellt.



39.1 Überprüfen Sie, ob eine der angegebenen Gleichungen den Graphen P beschreibt. Geben Sie gegebenenfalls die Gleichung an und begründen Sie Ihre Aussage.

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4{,}5$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ d) $y = -x^2 + 6x$

39.2 Die Punkte $C(x_C / y_C)$ liegen auf dem Graphen P, wobei gilt: $y_C \geq \frac{1}{2}x_C + 2$.
Ermitteln Sie mit Hilfe der Zeichnung das Intervall I, in dem die Werte von x_C liegen.

VI. Potenzgesetze

Vereinfachen Sie ohne Verwendung des Taschenrechners folgende Terme so weit wie möglich:

40 $\frac{15^4}{5^4} =$ 41 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

42 $8^{\frac{1}{3}} =$ 43 für $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{3} \cdot x^{0{,}25} \cdot \sqrt{27} \cdot x^{-1} \cdot \sqrt[4]{x^3} =$