

Grundlagen zum Stoffgebiet „Algebra“ (alle außer Vorklasse) Lösungshinweise

$$1 \quad \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 6\} = \underline{\underline{\{2; 3; 4; 5\}}}$$

$$2 \quad \{2; 3; 4\} \cap \{1; 2; 4; 6\} = \underline{\underline{\{2; 4\}}}$$

$$3 \quad \{1; 2; 3\} \cup \{2; 3; 4; 5\} = \underline{\underline{\{1; 2; 3; 4; 5\}}}$$

$$4 \quad x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}: \quad \underline{\underline{x = -1}}$$

$$5 \quad x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}: \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{3}}}$$

$$6 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: \quad \underline{\underline{x = \sqrt{2}}}$$

$$7 \quad (3+a) \cdot (4-a) = 12 - 3a + 4a - a^2 = \underline{\underline{12 + a - a^2}}$$

$$8 \quad -2(2x-v)(3v+x) = -2(6xv + 2x^2 - 3v^2 - xv) = -2(2x^2 - 3v^2 + 5xv) = \\ = \underline{\underline{-4x^2 + 6v^2 - 10xv}}$$

$$9 \quad (2x - 3v)^2 = \underline{\underline{4x^2 - 12xv + 9v^2}}$$

$$10 \quad (3+a)^3 = \underline{\underline{27 + 27a + 9a^2 + a^3}}$$

$$11 \quad 3x - xa + bx = \underline{\underline{x(3-a+b)}}$$

$$12 \quad 6x(u+v) - 9(u+v)y = (6x-9y)(u+v) = \underline{\underline{3(2x-3y)(u+v)}}$$

$$13 \quad x^2 - 4 = \underline{\underline{(x-2)(x+2)}}$$

$$14 \quad 4x^2 + 9y^2 + 12xy = \underline{\underline{(2x+3y)^2}}$$

$$15 \quad x^2 - 5x + 6 = \underline{\underline{(x-2)(x-3)}}$$

$$16 \quad \frac{x+1}{2} + \frac{2}{x+1} = \frac{(x+1)^2 + 4}{2(x+1)} = \frac{x^2 + 2x + 1 + 4}{2x+2} = \underline{\underline{\frac{x^2 + 2x + 5}{2x+2}}}$$

$$17 \quad \frac{1}{2a} - \frac{x}{ab} = \underline{\underline{\frac{b-2x}{2ab}}}$$

$$18 \quad \left(-\frac{5x}{a+z}\right) \cdot \left(-\frac{z+a}{5y}\right) = \underline{\underline{\frac{x}{y}}}$$

$$19 \quad [z \neq 1] \quad \frac{z^2 + 1 + 2z}{2x + 2y} \cdot \frac{x+y}{z^2 - 1} = \frac{(z+1)^2 \cdot (x+y)}{2(x+y) \cdot (z+1)(z-1)} = \frac{z+1}{2(z-1)} = \underline{\underline{\frac{z+1}{2z-2}}}$$

$$20 \quad \frac{2x}{y} : \frac{x}{2y} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x} = 4$$

$$21 \quad [a \neq b] \quad \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a-b} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{a-b} = \frac{\frac{b-a}{ab}}{a-b} = \frac{-(a-b)}{ab(a-b)} = \underline{\underline{-\frac{1}{ab}}}$$

Grundlagen zum Stoffgebiet „Algebra“ (alle außer Vorklasse) Lösungshinweise

- 22 x: Flächeninhalt des gesamten Ballens

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 8 \text{ m}^2 = x$$

$$\frac{7}{12}x + 8 \text{ m}^2 = x \quad | - \frac{7}{12}x$$

$$8 \text{ m}^2 = \frac{5}{12}x \quad | : \frac{5}{12}$$

$$19,2 \text{ m}^2 = x$$

Der Flächeninhalt des gesamten Ballens beträgt $19,2 \text{ m}^2$.

- 23 x: erste der fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 155$$

$$5x + 10 = 155 \quad | -10$$

$$5x = 145 \quad | :5$$

$$x = 29$$

Die gesuchten Zahlen sind 29, 30, 31, 32 und 33.

- 24 Der Schuhverkäufer hat insgesamt 100 € verloren. Den Wert der Schuhe und die 25 € Wechselgeld.

- 25 Bestimmen Sie die Lösungsmenge L des folgenden linearen Gleichungssystems.

Es sei $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{I} \quad x - 2y = 5$$

$$\text{II} \quad 2x + 3y = -4$$

$$2\text{I} \quad 2x - 4y = 10$$

$$\text{II} \quad 2x + 3y = -4$$

$$2\text{I} - \text{II} \quad -7y = 14 \quad | :7$$

$$\underline{y = -2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 5 + 2(-2) = 1} \quad \underline{\underline{L = \{(1; -2)\}}}$$

26 $g_1: y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

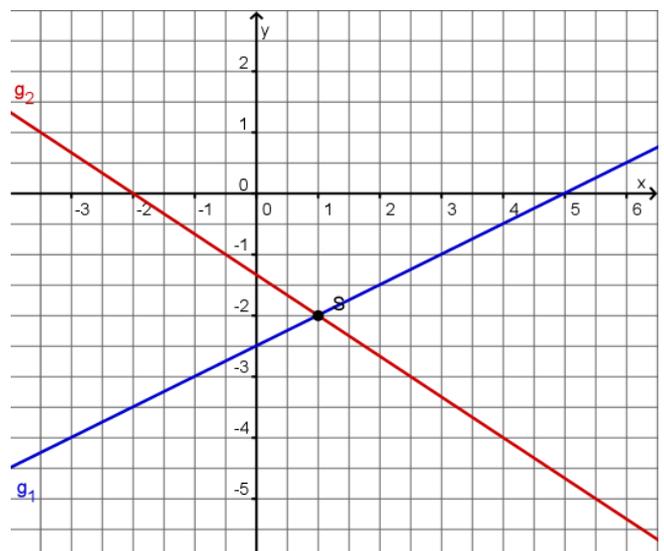
$$g_2: y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

27 $\frac{x}{3} = \frac{4-x}{4} \quad | \cdot 12$

$$4x = 12 - 3x \quad | + 3x$$

$$7x = 12 \quad | :7$$

$$x = \frac{12}{7}$$



Grundlagen zum Stoffgebiet „Algebra“ (alle außer Vorklasse) Lösungshinweise

$$\begin{aligned}28 \quad (x-4)(4x-3) &= (4x+3)(x-8) \\ 4x^2 - 3x - 16x + 12 &= 4x^2 - 32x + 3x - 24 \quad | -4x^2 \\ -19x + 12 &= -29x - 24 \quad | +29x - 12 \\ 10x &= -36 \\ x &= -3,6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}29 \quad \frac{3x-2}{x+2} &= 7 - \frac{5}{x+2} \quad | \cdot (x+2) & D = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ 3x - 2 &= 7(x+2) - 5 \\ 3x - 2 &= 7x + 14 - 5 \quad | -7x + 2 \\ -4x &= 11 \quad | :(-4) \\ x &= -\frac{11}{4}\end{aligned}$$

$$30 \quad \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot 3} = \underline{\underline{6}}$$

$$31 \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \text{Vereinfachung nicht möglich}$$

$$32 \quad u, v \in \mathbb{R}: \quad \sqrt{4u^2 + 4uv + v^2} = \sqrt{(2u+v)^2} = \underline{\underline{|2u+v|}}$$

$$33 \quad 11 < \sqrt{137} < 12, \text{ da } 11^2 = 121 < 137 < 144 = 12^2$$

$$\begin{aligned}34 \quad x^2 + 10x - 96 &= 0 \\ (x+16)(x-6) &= 0 \\ x_1 = -16, x_2 = 6 & \quad \underline{\underline{L = \{-16; 6\}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}35 \quad a^2 - a + 1 &= 0 \\ a_{1/2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}; \quad \underline{\underline{L = \{ \}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}36 \quad 3x^2 - 5x &\leq -2 \quad | +2 \\ 3x^2 - 5x + 2 &\leq 0 & \text{NR: } 3x^2 - 5x + 2 &= 0 \\ 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1) &\leq 0 & x_{1/2} &= \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 1}{6} \\ \left(x - \frac{2}{3} \leq 0 \wedge x-1 \geq 0\right) \vee &\left(x - \frac{2}{3} \geq 0 \wedge x-1 \leq 0\right) & x_1 &= \frac{2}{3}; \quad x_2 = 1 \\ \left(x \leq \frac{2}{3} \wedge x \geq 1\right) \vee &\left(x \geq \frac{2}{3} \wedge x \leq 1\right) \\ L &= \left[\frac{2}{3}; 1\right]\end{aligned}$$

Alternativlösung: Der Graph der Funktion $p: x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$; $D_p = \mathbb{R}$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 1 \Rightarrow L = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$

